



Álgebra Linear e Geometria Analítica

P1: Listas de Exercício

1. Sistemas Lineares

2. Vetores



Profa. Karla Lima
FACET/UFAC

1 Sistemas Lineares 11/03

1.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1 Diga quais das equações a seguir são lineares:

- a) $x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3$
- b) $x - 2y + 3z = 4$
- c) $2x_1 + \log x_2 + x_3 = \log 2$
- d) $-x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 = 0$
- e) $\sqrt{3}x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3 = 5$
- f) $x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 10 - 2x_5$

Exercício 2 Verifique se $(2, 0, -3)$ é solução de $2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2$.

Exercício 3 Verifique se $(1, 1, -1, -1)$ é solução de $5x_1 - 10x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$.

Exercício 4 Encontre uma solução para a equação linear $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$, diferente da solução $(0, 0, 0)$.

Exercício 5 Escreva na forma matricial os seguintes sistemas:

a)

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 2y + 2z = 5 \\ 5x - y + 5z = 1 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -x + 4y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 3x - 5y + 4z - t = 8 \\ 2x + y - 2z = -3 \\ -x - 2y + z - 3t = 1 \\ -5x - y + 6t = 4 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} \sqrt{2}x - 3y + 2z = 7 \\ 7y - z = 0 \\ 4x + \sqrt{3}y + 2z = 5 \end{cases}$$

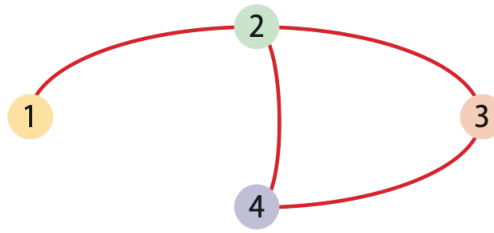
c)

$$\begin{cases} x + y - z = 3 - t \\ -x - y - 2z = 1 - 3t \\ 5x + 3z = 7 + t \end{cases}$$

1.2 Problemas

Exercício 6 As colegas de sala Ana, Alice e Aurora foram comprar seus livros de Matemática. Alice percebeu que havia esquecido sua carteira. Ana e Aurora pagaram pelos três livros; Ana contribuiu com R\$ 43,00 e Aurora com R\$ 68,00. Quanto Alice deve pagar para Ana e para Aurora, respectivamente?

Exercício 7 O diagrama a seguir representa um mapa rodoviário mostrando as estradas que ligam as cidades 1, 2, 3 e 4.



Podemos representar esse mapa rodoviário na matriz $B = [b_{ij}]_{4 \times 4}$, definida do seguinte modo:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a cidade } i \text{ está ligada diretamente à cidade } j, \\ 0 & \text{se } i = j \text{ ou se } i \text{ não tem ligação direta com } j. \end{cases}$$

Por exemplo, $b_{11} = 0$, pois $i = j = 1$.

Construa a matriz B .

Exercício 8 Uma escola fez um levantamento para identificar a quantidade de estudantes matriculados, por sexo e por turno. Observe os resultados obtidos, considerando dois segmentos: Ensino Fundamental e Ensino Médio.

> Quantidade de estudantes matriculados

Sexo Turno	Ensino Fundamental		Ensino Médio	
	Masculino	Feminino	Masculino	Feminino
Manhã	340	410	180	152
Tarde	105	87	64	36
Noite	96	134	113	88

a) Organize esses dados em duas matrizes $A_{3 \times 2}$ e $B_{3 \times 2}$, de modo que a matriz A represente os estudantes do Ensino Fundamental por turno e sexo, e a matriz B represente os estudantes do Ensino Médio por turno e sexo.

b) Determine a matriz $C = A + B$. O que essa matriz C representa?

Exercício 9 As mensagens entre duas agências de espionagem, Gama e Rapa, são trocadas usando uma linguagem de códigos, onde cada número inteiro entre 0 e 25 representa uma letra, conforme mostra a tabela a seguir:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
7	10	22	9	5	4	18	2	17	25	23	12	14
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
8	1	19	15	20	21	11	3	16	24	6	13	0

A agência Gama enviou para a Rapa o nome de um espião codificado na matriz

$$A = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Para decodificar uma palavra de cinco letras, dada por uma matriz A , de ordem 5×1 formada por inteiros entre 0 e 25, deve-se multiplicá-la pela matriz de conversão:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e, usando-se a tabela dada, converter os números em letras.

Utilizando-se esse processo, conclui-se que o nome do espião é:

- a) DIEGO
- b) SHUME
- c) SADAN
- d) RENAN
- e) RAMON

Exercício 10 Uma fábrica de camisetas utiliza três tipos de tecido (Algodão, Poliéster e Elastano) na produção de dois modelos de camisetas, conforme indicado na tabela.

	Modelo A	Modelo B
Algodão	3	2
Poliéster	1	2
Elastano	2	1

A fábrica recebeu o seguinte pedido para os próximos três meses:

	Janeiro	Fevereiro	Março
Modelo A	100	120	150
Modelo B	80	100	90

- a) Escreva a matriz $T_{3 \times 2}$ que representa a quantidade de tecido usada em cada modelo.
- b) Escreva a matriz $P_{2 \times 3}$ que representa a quantidade de camisetas produzidas em cada mês.
- c) Calcule o produto $T \cdot P$ e interprete o resultado.

Exercício 11 Uma indústria de sucos produz dois tipos de bebidas: Suco Natural e Suco Light. Para cada litro produzido são utilizados três ingredientes: fruta, açúcar e água.

	Natural	Light
Fruta	4	3
Açúcar	2	1
Água	3	4

A produção planejada para três semanas é:

	Semana 1	Semana 2	Semana 3
Natural	200	250	300
Light	150	200	250

- Construa a matriz A que representa os ingredientes por tipo de suco.
- Construa a matriz B que representa a produção semanal.
- Determine $A \cdot B$.
- Interprete o significado da segunda coluna da matriz obtida.

2 Sistemas Lineares 18/03

2.1 Exercícios de Fixação

Exercício 12 Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$.

- Verifique qual das matrizes abaixo é a sua inversa:

$$(i) \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

- Resolva o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = -1 \\ 5x_1 + 11x_2 = -1 \end{cases}$$

Exercício 13 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

- Verifique qual das matrizes abaixo é a sua inversa:

$$(i) \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Resolva o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 + 9x_2 + x_3 = 21 \end{cases}$$

Exercício 14 Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares tenha sido reduzida à dada forma escalonada por meio de operações elementares sobre as linhas. Resolva o sistema.

(a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right]$$

(b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Exercício 15 Usando o Método de Eliminação de Gauss-Jordan, resolva os sistemas abaixo:

a)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

d)

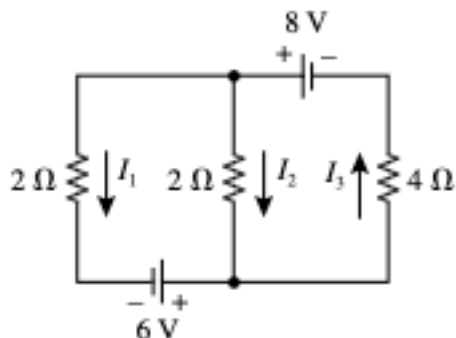
$$\begin{cases} v + 3w - 2x = 0 \\ 2u + v - 4w + 3x = 0 \\ 2u + 3v + 2w - x = 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x = 0 \end{cases}$$

2.2 Problemas

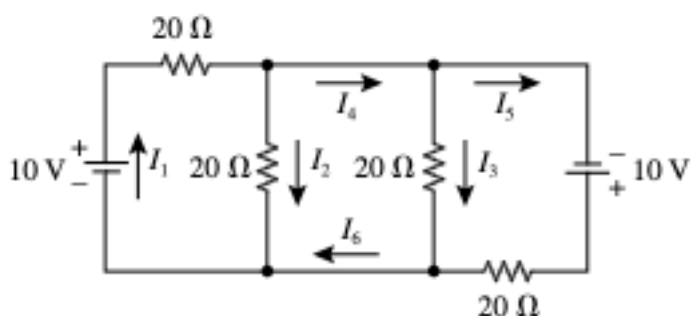
Exercício 16 Leia e compreenda os exemplos sobre circuitos elétricos disponível neste arquivo *Circuitos Elétricos*.

Exercício 17 Em cada item, analise os circuitos elétricos dados encontrando as correntes desconhecidas.

a)



b)



3 Vetores 30/03

3.1 Exercícios de Fixação

Exercício 18 Sejam $\mathbf{u} = (-3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 0, -8)$ e $\mathbf{w} = (6, -1, -4)$. Calcule:

1. $\mathbf{v} - \mathbf{w}$
2. $-\mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $-3(\mathbf{v} - 8\mathbf{w})$
4. $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u})$

Exercício 19 Sejam $\mathbf{u} = (-3, 2, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (4, 7, -3, 2)$ e $\mathbf{w} = (5, -2, 8, 1)$. Calcule:

1. $\mathbf{v} - \mathbf{w}$
2. $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$
3. $-\mathbf{u} + (\mathbf{v} - 4\mathbf{w})$
4. $-\mathbf{v} - \mathbf{w}$

Exercício 20 Sejam \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} os vetores do exercício anterior. Encontre \mathbf{x} tal que:

$$5\mathbf{x} - 2\mathbf{v} = 2(\mathbf{w} - 5\mathbf{x})$$

Exercício 21 *Sejam $\mathbf{u} = (5, -1, 0, 3, -3)$, $\mathbf{v} = (-1, -1, 7, 2, 0)$ e $\mathbf{w} = (-4, 2, -3, -5, 2)$. Calcule:*

1. $\mathbf{w} - \mathbf{u}$
2. $2\mathbf{v} + 3\mathbf{u}$
3. $3\mathbf{w} + 3(\mathbf{v} - \mathbf{u})$
4. $\frac{1}{2}(\mathbf{w} - 5\mathbf{v} + 2\mathbf{u}) + \mathbf{v}$

Exercício 22 *Sejam $\mathbf{u} = (1, 2, -3, 5, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 4, -1, 1, 2)$ e $\mathbf{w} = (7, 1, -4, -2, 3)$. Calcule:*

1. $\mathbf{v} + \mathbf{w}$
2. $3(2\mathbf{u} - \mathbf{v})$
3. $(3\mathbf{u} - \mathbf{v}) - (2\mathbf{u} + 4\mathbf{w})$

Exercício 23 *Sejam \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} os vetores do exercício anterior. Encontre \mathbf{x} tal que:*

$$3\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w} = 3\mathbf{x} + 2\mathbf{v}$$

4 Equações da Reta e do Plano

Exercício 24 *Encontre as equações vetoriais e paramétricas das retas que satisfazem as condições abaixo.*

- a) Passa pelo ponto $P_0(0, 1)$ e é paralela ao vetor $\mathbf{v} = (-2, 4)$.
- b) Passa pelos pontos $P_0(0, 0)$ e $P_1(3, 5)$.
- c) Passa pelos pontos $P_0(1, -1, 1)$ e $P_1(2, 1, 1)$.

Exercício 25 *Encontre uma equação geral e uma equação vetorial do plano que passa pelos pontos $P = (1, 2, 4)$, $Q = (1, -1, 6)$ e $R = (1, 4, 8)$.*

Exercício 26 *Mostre que a reta de equações paramétricas $x = 0$, $y = t$ e $z = t$:*

- a) está contida no plano $6x + 4y - 4z = 0$ (ou seja, todos os pontos da reta estão no plano);
- b) é paralela ao plano $5x - 3y + 3z = 1$.

Exercício 27 *Seja π o plano que passa pelos pontos $P_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, $P_2 = (0, \frac{1}{2}, 0)$ e $P_3 = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.*

- (a) Determine a equação geral do plano π .
- (b) Determine a equação paramétrica do plano π .
- (c) Determine a equação vetorial do plano π .